Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels

Note (1) de MM. S. Banach et S. Mazur, présenté par M. Elie Cartan
(publié dans Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 196 (1933), p. 86–88).

Deux espaces normés X et Y s'appèllent *isomorphes*, lorsqu'il existe une opération additive $y = u(x)$ qui transforme X en Y d'une façon biunivoque et bicontinue; nous dirons que les espaces X et Y sont de *dimension linéaire égale*, lorsque chacun d'eux est isomorphe avec un sous-espace linéaire de l'autre (2). Nous donnons ici un exemple de deux espaces séparables du type $(\mathscr{B})$ (c'est-à-dire linéaires normés et complets) qui sont de dimension linéaire égale sans être isomorphes; la question posée dans le livre cité plus haut, p. 193–194, se trouve donc résolue par la positive.

Soit $(\mathscr{W})$ l'espace des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire l'espace du type $(\mathscr{B})$, que constitue l'ensemble de toutes les fonctions $x(t)$ à variation bornée dans $\langle 0, 1\rangle$ et telles que $x(0) = 0$, avec les définitions habituelles des opérations fondamentales, lorsqu'on définit la norme pour tout $x \in (\mathscr{W})$ par la formule $\|x\| =$ variation $x(t)$; désignons par $\mathscr{L}$ l'espace des fonctions sommables dans $\langle 0, 1\rangle$. En appelant deux espaces linéaires normés X et Y *équivalents* lorsqu'il existe une opération additive $y = U(x)$, qui transforme X en Y de façon que $\|y\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$ (3), on a le

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Tout sous-espace linéaire séparable de l'espace $(\mathscr{W})$ est équivalent à un sous-espace linéaire de l'espace $(\mathscr{L})$.*

Il en résulte, en vertu d'un théorème de M. W. Orlicz (4), le

THÉORÈME I. *Soit $\{z_n(t)\}$ une suite de fonctions à variation bornée dans*

---

(1) Séance du 27 décembre 1932.

(2) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chapitres XI, XII, Warszawa 1932 [ce volume, p. 154–186].

(3) Les espaces équivalents sont isométriques; la réciproque est aussi vraie. Voir S. Mazur et S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, Comptes Rendus 194 (1932), p. 946–948.

(4) W. Orlicz [*Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II*]. Studia Mathematica 1 (1929) [p. 241–255], p. 247.

$\langle 0, 1\rangle$. *S'il existe une constante* $\mathscr{K}$, *telle que*

$$\text{variation } [z_{n_1}(t)+z_{n_2}(t)+\ldots+z_{n_i}(t)] \leqslant \mathscr{K},$$

quel que soit le système d'indices différents $n_1, n_2, \ldots, n_i$, *on a*

$$\text{variation } [z_p(t)+z_{p+1}(t)+\ldots+z_g(t)] \to 0 \quad \textit{pour} \quad p, g\to\infty.$$

Ce théorème implique immédiatement le suivant:

THÉORÈME II. *Soit* $\{z_n(t)\}$ *une suite de fonctions à variation bornée dans* $\langle 0, 1\rangle$, *telle que*

$$\liminf_{h\to 0} z_n(t+h) \leqslant z_n(t) \leqslant \limsup_{h\to 0} z_n(t+h)$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ *et* $0 < t < 1$. *Si pour toute fonction* $x(t)$ *continue dans* $\langle 0, 1\rangle$ *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x(t)\,dz_n(t)$ *converge absolument, on a*

$$\text{variation } [z_p(t)+z_{p+1}(t)+\ldots+z_g(t)] \to 0 \quad \textit{pour} \quad p, g\to\infty.$$

Étant donnés deux espaces linéaires normés X et Y, nous dirons que l'espace Y est une *image linéaire* de l'espace X, s'il existe une opération linéaire, c' est-à-dire additive et continue, qui transforme X en Y. En désignant par (C) l'espace des fonctions continues dans $\langle 0, 1\rangle$ et par (l) l'espace des séries absolument convergentes de nombres, on peut démontrer, par une déduction facile du théorème II, le

THÉORÈME III. *L'espace* (l) *n'est pas une image linéaire de l'espace* (C).

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les fonctions $x(t)$ continues dans $\langle 0, 1\rangle$ et telles que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x(1/n)$ converge absolument. L'ensemble $\mathscr{E}$ constitue un espace séparable du type $(\mathscr{B})$, lorsqu'on définit la norme pour tout $x\in\mathscr{E}$ par la formule

$$\|x\| = \max|x(t)|+\sum_{n=1}^{\infty} |x(1/n)|$$

et que l'on conserve les définitions habituelles des opérations fondamentales. Les espaces (C) et $\mathscr{E}$ sont de dimension linéaire égale, de plus chacun d'eux est équivalent à un sous-espace linéaire de l'autre ([5]); il résulte cependant du théorème précédent que ces espaces ne sont pas isomorphes, et même que l'espace (C) n'est pas une image linéaire de l'espace $\mathscr{E}$.

Parmi d'autres conséquences du théorème III ([6]), notons encore la

([5]) Tout espace linéaire, normé et séparable est équivalent à un sous-espace linéaire de l'espace (C). Voir le livre cité p. 185–188 [ce volume, p. 169–171].

([6]) Il résulte du théorème III une solution de quelques problèmes qui correspondent aux mailles libres du tableau dans le livre cité, p. 245 [ce volume, p. 215].

suivante: Soient X et Y deux espaces du type $(\mathscr{B})$ et $y = U(x)$ une opération linéaire définie dans l'ensemble linéaire $\mathscr{R} \subset X$, dont le contre-domaine est situé dans Y. Existe-t-il une opération linéaire $\mathscr{V}(x)$ définie dans X, ayant son contre-domaine dans Y et telle que $\mathscr{V}(x) = U(x)$ pour $x \in \mathscr{R}$? La réponse est négative. En effet, il suffit de poser $X = Y = (C)$, $U(x) = x$ pour $x \in \mathscr{R}$, en désignant par $\mathscr{R}$ un sous-espace linéaire de l'espace (C), isomorphe avec l'espace (l) ([7]).

([7]) Voir le livre cité, p. 234 [ce volume, p. 206–207].